

基于区间值相似度的模糊推理算法

史宏艳, 罗敏霞

(中国计量大学理学院, 浙江杭州 310018)

摘要: 模糊推理最基本的模型是模糊假言推理和模糊反驳推理. 本文是在区间值模糊集层面解决区间值模糊假言推理和区间值模糊反驳推理问题, 给出基于区间值相似度的模糊推理算法. 首先, 基于区间值 t -可表示三角范数诱导的区间值剩余蕴涵, 给出一种区间值相似度; 其次, 研究基于区间值相似度的模糊推理算法, 给出算法解的表示形式; 证明基于区间值相似度的模糊推理算法具有还原性; 最后, 研究基于区间值相似度的广义模糊推理算法. 本文提出的基于区间值相似度的模糊推理算法可应用于模式识别与多属性决策等领域.

关键词: 区间值模糊集; 区间值三角范数; 区间值剩余蕴涵; 区间值相似度; t -可表示三角范数; 模糊推理算法

中图分类号: O141.1

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2022)11-2738-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20211085

Fuzzy Inference Method Based on Interval-Valued Similarity Measure

SHI Hong-yan, LUO Min-xia

(College of Sciences, China Jiliang University, Hangzhou, Zhejiang 310018, China)

Abstract: The basic models of fuzzy reasoning are fuzzy modus ponens and fuzzy modus tollens. The paper studies the problems of interval-valued fuzzy modus ponens and interval-valued fuzzy modus tollens at the level of interval-valued fuzzy sets, and propose fuzzy reasoning algorithms based on interval-valued similarity measure. Based on the interval-valued residuated implication induced by left-continuous interval-valued t -representable triangular norm, the interval-valued similarity measure is given. The fuzzy reasoning algorithms based on interval-valued similarity are further studied, and the representation of the algorithm solutions are given. Meanwhile, the fuzzy reasoning algorithms based on interval-valued similarity are proved to be reductive. Finally, the generalized fuzzy reasoning algorithms based on interval-valued similarity measure are studied. The fuzzy reasoning algorithms based on interval-valued similarity measure can be applied to the fields of pattern recognition and multi-attribute decision-making.

Key words: interval-valued fuzzy set; interval-valued triangular norm; interval-valued residuated implication; interval-valued similarity; t -representable triangular norm; fuzzy reasoning algorithm

1 引言

在模糊推理理论中, 最基本的推理模型是模糊假言推理 (Fuzzy Modus Ponens, FMP) 和模糊反驳推理 (Fuzzy Modus Tollens, FMT):

FMP: 给出规则 $A \rightarrow B$, 输入 A^* , 输出 B^* ;

FMT: 给出规则 $A \rightarrow B$, 输入 B^* , 输出 A^* .

模糊推理最基本的模型 FMP 和 FMT 也被称为广义的假言推理 (GMP) 和广义的反驳推理 (GMT)^[1].

1973 年, Zadeh 首次提出处理这种推理模型的推理算法—推理合成规则 CRI^[2] (Compositional Rule of Infer-

ence); 王国俊教授提出 CRI 算法缺乏严格的逻辑基础, 提出了全蕴涵的三 I 算法^[3], 把模糊推理带入到逻辑语义框架中; 文献[4]研究基于 Schweizer-Sklar 三角范数簇的反向三 I 算法. 然而在 CRI 算法和全蕴涵三 I 算法的推理中, 没有考虑 A 和 A^* (或 B 和 B^*) 的接近程度, 使得一些计算结果出现平凡解的结果. 为了克服这种缺陷, 周宝奎教授等人在文献[5]中提出了模糊推理的五蕴涵算法, 使得五蕴涵算法更适合解决一些推理问题. 由于五蕴涵算法考虑 A^* 对 A 的包含程度, 没有考虑 A^* 和 A 的相似程度, 导致一些计算结果出现平凡解的情

形. 为了克服五蕴涵算法的缺陷, 文献[6]提出了基于相似度的模糊推理算法.

尽管模糊集被广泛应用于各个领域, 但是在处理信息的模糊性与不确定性时存在一定的缺陷, 所以 Zadeh 在 1975 年提出区间值模糊集^[7], 其隶属度是 $[0, 1]$ 的子区间, 不仅包含变量属性的确定信息, 还包含了不确定信息, 区间值模糊集在处理不确定信息时具有更强的能力. 随着区间值模糊集的提出, 基于区间值模糊集做了大量的推理算法研究并且取得一系列研究成果. 文献[8]扩展 CRI 算法到区间值模糊集情形, 研究区间值 CRI 模糊推理算法; 文献[9]把 SIS 算法与区间值模糊集结合起来, 研究区间值模糊推理 SIS 算法; 文献[10~12]分别研究基于区间值相关联三角范数全蕴涵的三 I 算法、五蕴涵算法及区间值相似度推理算法. 进一步, 基于区间值 t -可表示三角范数的模糊推理算法也取得一些研究成果. 文献[13]研究基于区间值 t -可表示三角范数的模糊推理全蕴涵算法; 然而在基于区间值 t -可表示三角范数的模糊推理全蕴涵三 I 算法的推理中没有考虑 A 和 A^* (或 B 和 B^*) 的接近程度, 使得一些计算结果出现平凡解的结果. 为了克服这种缺陷, 文献[14]提出基于区间值 t -可表示三角范数的模糊推理五蕴涵算法, 然而区间值模糊推理五蕴涵算法只考虑 A^* 和 A 的包含程度, 没有考虑 A^* 和 A 的相似程度, 使得一些结果出现平凡解 (见例 1), 为了克服这个缺点, 本文研究基于区间值 t -可表示三角范数的模糊推理相似度算法.

2 预备知识

在本节中, 回顾区间值模糊集的相关概念, 列举本文需要用到的结论.

定义 1^[15] 设映射 $T: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, 任意的 $x \in [0, 1]$, 如果 T 满足交换律、结合律、两个变量单调递增及 $T(x, 1) = x$, 则 T 称为三角范数.

定义 2^[15] 设 T 是三角范数, 如果对于任意的 $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $(x, y) \in (x_0 - \delta, x_0) \times (y_0 - \delta, y_0)$ 时, 有 $T(x, y) > T(x_0, y_0) - \varepsilon$ 成立, 则称三角范数 T 是左连续的.

设 $L^I = \{[a, b] \mid a, b \in [0, 1]^2, a \leq b\}$, L^I 上的偏序 \leq_{L^I} 定义为^[16]: $[a, b] \leq_{L^I} [c, d] \Leftrightarrow a \leq c, b \leq d$. 对于任意 $\alpha = [a, b], \beta = [c, d] \in L^I, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta$ 定义为: $\alpha \wedge \beta = [a \wedge c, b \wedge d], \alpha \vee \beta = [a \vee c, b \vee d]$. 对于任意的 $[a_i, b_i] \in L^I, \sup_{i \in I} [a_i, b_i] = [\sup_{i \in I} a_i, \sup_{i \in I} b_i], \inf_{i \in I} [a_i, b_i] = [\inf_{i \in I} a_i, \inf_{i \in I} b_i]$. L^I 上的最大元和最小元分别是 $1^* = [1, 1]$ 和 $0^* = [0, 0]$, 容易证明 $(L^I, \wedge, \vee, 0^*, 1^*)$ 是完备格.

定义 3^[7] 非空论域 X 上区间值模糊集 $A = \{(x, [A_l(x), A_r(x)]) \mid [A_l(x), A_r(x)] \subseteq [0, 1], x \in X\}$. 非空论域 X

上的所有区间值模糊集记作 $IVFS(X)$. 设 $A, B \in IVFS(X)$, 并和交运算定义如下: $A \cap B = \{[\sup(A_l(x), B_l(x)), \sup(A_r(x), B_r(x))] \mid x \in X\}; A \cup B = \{[\inf(A_l(x), B_l(x)), \inf(A_r(x), B_r(x))] \mid x \in X\}$.

定义 4^[17] 设映射 $T_{T_1, T_2}: L^I \times L^I \rightarrow L^I$, 对于任意 $[a, b] \in L^I$, 如果 T_{T_1, T_2} 满足交换律、结合律、两个变量单调递增及 $T_{T_1, T_2}([a, b], [1, 1]) = [a, b]$, 则称 T_{T_1, T_2} 为区间值三角范数.

定义 5^[17] 一个区间值三角范数 T_{T_1, T_2} 称为 t -可表示的, 如果存在两个三角范数 T_1 和 $T_2 (T_1 \leq T_2)$, $T_{T_1, T_2}([a, b], [c, d]) = [T_1(a, c), T_2(b, d)]$.

当三角范数 T_1, T_2 分别是左连续的, 则区间值 t -可表示三角范数 T_{T_1, T_2} 称为左连续的区间值 t -可表示三角范数^[13].

注 1 当 $T_1 = T_2 = T$ 时, 区间值 t -可表示三角范数退化为区间值相关联三角范数^[18]:

$$T_{T, T}([a, b], [c, d]) = [T(a, c), T(b, d)].$$

定义 6^[19] 设 T_{T_1, T_2} 是左连续的区间值 t -可表示三角范数, 对于任意的 $[a, b], [c, d] \in L^I, R_{T_1, T_2}([a, b], [c, d]) = \sup \{[x, y] \in L^I \mid T_{T_1, T_2}([x, y], [a, b]) \leq_{L^I} [c, d]\}$ 称为区间值剩余蕴涵.

命题 1^[20] 设 T_{T_1, T_2} 是左连续的区间值 t -可表示三角范数, R_1, R_2 分别由左连续的三角范数 T_1, T_2 诱导且 $T_1 \leq T_2$, 则由左连续的区间值 t -可表示三角范数 T_{T_1, T_2} 诱导的区间值剩余蕴涵为:

$$R_{T_1, T_2}([a, b], [c, d]) = [R_1(a, c) \wedge R_2(b, d), R_2(b, d)].$$

引理 1^[13] 对于任意的 $[a, b], [c, d], [e, f], [a_i, b_i], [c_i, d_i] \in L^I$, 由左连续的区间值 t -可表示三角范数 T_{T_1, T_2} 诱导的区间值剩余蕴涵有如下的性质:

$$(1) R_{T_1, T_2}([a, b], [c, d]) = [1, 1] \text{ 当且仅当}$$

$$[a, b] \leq_{L^I} [c, d];$$

$$(2) R_{T_1, T_2}([1, 1], [c, d]) = [1, 1];$$

$$(3) [e, f] \leq_{L^I} R_{T_1, T_2}([a, b], [c, d]) \text{ 当且仅当}$$

$$[a, b] \leq_{L^I} R_{T_1, T_2}([e, f], [c, d]);$$

$$(4) R_{T_1, T_2}([a, b], R_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}([a, b], [c, d]), [c, d])) = [1, 1];$$

$$(5) \text{ 如果 } [c, d] \leq_{L^I} [a, b], \text{ 则}$$

$$R_{T_1, T_2}([a, b], [e, f]) \leq_{L^I} R_{T_1, T_2}([c, d], [e, f]);$$

$$(6) \text{ 如果 } [c, d] \leq_{L^I} [e, f], \text{ 则}$$

$$R_{T_1, T_2}([a, b], [c, d]) \leq_{L^I} R_{T_1, T_2}([a, b], [e, f]);$$

$$(7) R_{T_1, T_2}(\sup_{i \in I} [a_i, b_i], [c, d]) = \inf_{i \in I} R_{T_1, T_2}([a_i, b_i], [c, d]);$$

$$(8) R_{T_1, T_2}([a, b], \inf_{i \in I} [c_i, d_i]) = \inf_{i \in I} R_{T_1, T_2}([a, b], [c_i, d_i])$$

定义 7^[15] 设 T 是左连续的三角范数, R 是由三角范数 T 诱导的剩余蕴涵, 双剩余定义如下:

$$f(a, b) = a \leftrightarrow b = R(a, b) \wedge R(b, a), \forall a, b \in [0, 1].$$

引理 2^[21] 对于 $\forall a, b, c, d \in [0, 1]$, 与左连续三角范数 T 相关的双剩余 f 有如下的性质:

- (1) $a = b \Leftrightarrow f(a, b) = 1$;
- (2) $f(a, b) = f(b, a)$;
- (3) $f(a, b) \wedge f(c, d) \leq f(a \vee c, b \vee d)$;
- (4) $T(f(a, b), f(c, d)) \leq f(T(a, c), T(b, d))$;
- (5) $T(f(a, b), f(c, d)) \leq f(R(a, c), R(b, d))$.

定义 8 设 $[a, b], [c, d] \in L^I, R_{T_1, T_2}$ 是由左连续的区间值 t -可表示三角范数 T_{T_1, T_2} 诱导的区间值剩余蕴涵, 区间值双剩余 f_T 定义为: $f_T([a, b], [c, d]) = R_{T_1, T_2}([a, b], [c, d]) \wedge R_{T_1, T_2}([c, d], [a, b])$.

引理 3 设 $[a, b], [c, d], [e, f], [g, h] \in L^I, T_{T_1, T_2}$ 是左连续的区间值 t -可表示三角范数, f_1 和 f_2 分别由左连续三角范数 T_1 和 T_2 诱导的剩余蕴涵 R_1, R_2 定义的双剩余, 则与左连续的区间值 t -可表示三角范数 T_{T_1, T_2} 诱导的剩余蕴涵定义的区间值双剩余 f_T 有如下性质:

- (1) $f_T([a, b], [1, 1]) = [a, b]$;
- (2) $[a, b] = [c, d] \Leftrightarrow f_T([a, b], [c, d]) = [1, 1]$;
- (3) $f_T([a, b], [c, d]) = f_T([c, d], [a, b])$;
- (4) $f_T([a, b], [c, d]) = [f_1(a, c) \wedge f_2(b, d), f_2(b, d)]$;
- (5) $T_{T_1, T_2}(f_T([a, b], [c, d]), f_T([e, f], [g, h])) \leq_{L^I} f_T(T_{T_1, T_2}([a, b], [e, f]), T_{T_1, T_2}([c, d], [g, h]))$;
- (6) $T_{T_1, T_2}(f_T([a, b], [c, d]), f_T([e, f], [g, h])) \leq_{L^I} f_T(R_{T_1, T_2}([a, b], [e, f]), R_{T_1, T_2}([c, d], [g, h]))$.

证明 性质(1)与(3)是显然的.

$$\begin{aligned} & (2) \text{ 对于任意 } [a, b], [c, d] \in L^I, f_T([a, b], [c, d]) = [1, 1] \\ & \Leftrightarrow R_{T_1, T_2}([a, b], [c, d]) \wedge R_{T_1, T_2}([c, d], [a, b]) = [1, 1] \\ & \Leftrightarrow [R_1(a, c) \wedge R_2(b, d), R_2(b, d)] \wedge [R_1(c, a) \wedge \\ & R_2(d, b), R_2(d, b)] = [1, 1] \\ & \Leftrightarrow [R_1(a, c) \wedge R_2(b, d) \wedge R_1(c, a) \wedge R_2(d, b), \\ & R_2(d, b) \wedge R_2(d, b)] = [1, 1] \\ & \Leftrightarrow [f_1(a, c) \wedge f_2(b, d), f_2(b, d)] = [1, 1] \\ & \Leftrightarrow f_1(a, c) = 1, f_2(b, d) = 1 \\ & \Leftrightarrow a = c, b = d \\ & \Leftrightarrow [a, b] = [c, d] \end{aligned}$$

- (4) 对于 $[a, b], [c, d] \in L^I$, 有: $f_T([a, b], [c, d])$

$$\begin{aligned} & = R_{T_1, T_2}([a, b], [c, d]) \wedge R_{T_1, T_2}([c, d], [a, b]) \\ & = [R_1(a, c) \wedge R_2(b, d), R_2(b, d)] \wedge [R_1(c, a) \wedge \\ & R_2(d, b), R_2(d, b)] \\ & = [R_1(a, c) \wedge R_2(b, d) \wedge R_1(c, a) \wedge R_2(d, b), \\ & R_2(b, d) \wedge R_2(d, b)] \\ & = [f_1(a, c) \wedge f_2(b, d), f_2(b, d)] \end{aligned}$$

- (5) 对于任意的 $[a, b], [c, d], [e, f], [g, h] \in L^I$, $f_T([a, b], [c, d])$

$$\begin{aligned} & = R_{T_1, T_2}([a, b], [c, d]) \wedge R_{T_1, T_2}([c, d], [a, b]) \\ & = [R_1(a, c) \wedge R_2(b, d) \wedge R_1(c, a) \wedge R_2(d, b), \\ & (R_2(b, d) \wedge R_2(d, b))] \\ & = [f_1(a, c) \wedge f_2(b, d), f_2(b, d)], \\ & T_{T_1, T_2}(f_T([a, b], [c, d]), f_T([e, f], [g, h])) \\ & = [T_1(f_1(a, c) \wedge f_2(b, d), f_1(e, g) \wedge f_2(f, h)), \\ & T_2((f_2(b, d), f_2(f, h)))] \\ & \leq_{L^I} [T_1(f_1(a, c), f_1(e, g)) \wedge T_1(f_2(b, d), f_2(f, h)), \\ & T_2(f_2(b, d), f_2(f, h))] \\ & \leq_{L^I} [f_1(T_1(a, e), T_1(c, g)) \wedge f_2(T_2(b, f), T_2(d, h)), \\ & f_2(T_2(b, f), T_2(d, h))] \\ & = f_T(T_{T_1, T_2}([a, b], [e, f]), T_{T_1, T_2}([c, d], [g, h])) \end{aligned}$$

- (6) 对于任意的 $[a, b], [c, d], [e, f], [g, h] \in L^I$, 根据式(1)可得:

$$\begin{aligned} & T_{T_1, T_2}(f_T([a, b], [c, d]), f_T([e, f], [g, h])) \\ & \leq_{L^I} [T_1(f_1(a, c), f_1(e, g)) \wedge T_2(f_2(b, d), f_2(f, h)), \\ & T_2(f_2(b, d), f_2(f, h))] \\ & \leq_{L^I} [f_1(R_1(a, e), R_1(c, g)) \wedge f_2(R_2(b, f), R_2(d, h)), \\ & f_2(R_2(b, f), R_2(d, h))] \\ & \leq_{L^I} [f_1(R_1(a, e) \wedge R_2(b, f), R_1(c, g) \wedge R_2(d, h)), \\ & f_2(R_2(b, f), R_2(d, h))] \\ & = f_T(R_{T_1, T_2}([a, b], [e, f]), R_{T_1, T_2}([c, d], [g, h])). \text{ 证毕.} \end{aligned}$$

引理 4 设 A, B 是论域 X 上的区间值模糊集, f_T 是由左连续的区间值 t -可表示三角范数 T_{T_1, T_2} 诱导的区间值双剩余, 则

$$f_T(\sup_{x \in X} A(x), \sup_{x \in X} B(x)) \geq_{L^I} \inf_{x \in X} f_T(A(x), B(x)).$$

证明 对于任意的 $A, B \in \text{IVFS}(X)$,

$$\begin{aligned} & f_T(\sup_{x \in X} A(x), \sup_{x \in X} B(x)) \\ & = [f_1(\sup_{x \in X} A_l(x), B_l(x)) \wedge f_2(\sup_{x \in X} A_r(x), B_r(x)), \\ & f_2(\sup_{x \in X} A_r(x), B_r(x))] \\ & \geq_{L^I} [\inf_{x \in X} f_1(A_l(x), B_l(x)) \wedge \inf_{x \in X} f_2(A_r(x), B_r(x)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \inf_{x \in X} f_2(A_r(x), B_r(x)) \\ & \geq_{L'} \inf_{x \in X} [f_1(A_l(x), B_l(x)) \wedge f_2(A_r(x), B_r(x)), \\ & f_2(A_r(x), B_r(x))] \\ & = \inf_{x \in X} f_T(A(x), B(x)). \text{证毕.} \end{aligned}$$

定义 9^[14] 设 A, B 是论域 X 上的区间值模糊集, 映射 $S: IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow L'$, 如果满足下列的性质:

- (1) $[0, 0] \leq_{L'} S(A, B) \leq_{L'} [1, 1]$;
- (2) $S(A, B) = [1, 1]$ 当且仅当 $A = B$;
- (3) $S(A, B) = S(B, A)$;
- (4) 如果 $A \subseteq B \subseteq C$, 则 $S(A, C) \leq_{L'} S(A, B)$, 且

$$S(A, C) \leq_{L'} S(B, C).$$

则 S 称为区间值模糊集 A 和 B 的相似度.

命题 2 设 A, B 是论域 X 上的区间值模糊集, 映射 $S: IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow L'$ 定义如下:

$$S(A, B) = \inf_{x \in X} f_T(A(x), B(x)),$$

其中 $f_T(A(x), B(x)) = R_{T_1, T_2}(A(x), B(x)) \wedge R_{T_1, T_2}(B(x), A(x))$,

则 S 是一个区间值相似度.

证明

- (1) 显然 $[0, 0] \leq_{L'} S(A, B) \leq_{L'} [1, 1]$.
- (2) 如果 $A = B$, 则 $S(A, B) = [1, 1]$.

当 $S(A, B) = [1, 1]$ 时, 根据命题 2 可得: $f_T(A(x), B(x)) = [1, 1]$, 因此, $[f_1(A_l(x), B_l(x)) \wedge f_2(A_r(x), B_r(x)), f_2(A_r(x), B_r(x))] = [1, 1]$, 所以 $f_1(A_l(x), B_l(x)) \wedge f_2(A_r(x), B_r(x)) = 1$, $f_2(A_r(x), B_r(x)) = 1$. 根据引理 1(2) 可得 $A(x) = B(x)$, 所以可得 $A = B$.

- (3) 显然可得.
- (4) 设 $A \subseteq B \subseteq C$, 根据引理 1(1) 和 (5) 可得,

$$\begin{aligned} S(A, C) &= \inf_{x \in X} (R_{T_1, T_2}(A(x), C(x)) \wedge R_{T_1, T_2}(C(x), A(x))) \\ &= \inf_{x \in X} R_{T_1, T_2}(C(x), A(x)); \\ S(B, C) &= \inf_{x \in X} (R_{T_1, T_2}(B(x), C(x)) \wedge R_{T_1, T_2}(C(x), B(x))) \\ &= \inf_{x \in X} R_{T_1, T_2}(C(x), B(x)); \\ S(A, B) &= \inf_{x \in X} (R_{T_1, T_2}(A(x), B(x)) \wedge R_{T_1, T_2}(B(x), A(x))) \\ &= \inf_{x \in X} R_{T_1, T_2}(B(x), A(x)). \end{aligned}$$

因为 $R_{T_1, T_2}(C, A) \leq_{L'} R_{T_1, T_2}(C, B)$, $R_{T_1, T_2}(C, A) \leq_{L'} R_{T_1, T_2}(B, A)$, 所以, $S(A, C) \leq_{L'} S(A, B)$, $S(A, C) \leq_{L'} S(B, C)$. 因此, S 是一个区间值相似度. 证毕.

3 基于区间值相似度的模糊推理算法

在下文中, 设 R_{T_1, T_2} 是由左连续的区间值 t -可表示三角范数 T_{T_1, T_2} 诱导的区间值剩余蕴涵, 在命题 2 给出

的区间值相似度的基础上, 提出一种基于区间值相似度的模糊推理算法.

定义 10 求解 FMP 问题的基于区间值相似度的模糊推理原理:

$$\begin{aligned} & R_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)), R_{T_1, T_2}(S(A^*(x), A(x)), \\ & R_{T_1, T_2}(A^*(x), B^*(y)))) = 1^* \end{aligned} \quad (1)$$

对于任意的 $x \in X, y \in Y$, R_{T_1, T_2} 是由左连续的区间值 t -可表示三角范数 T_{T_1, T_2} 诱导的区间值剩余蕴涵, 使得式 (1) 成立的论域 Y 上的最小的区间值模糊集 B^* , 称为求解 FMP 问题的基于区间值相似度的模糊推理算法的解.

定义 11 求解 FMT 问题的基于区间值相似度的模糊推理原理:

$$\begin{aligned} & R_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)), R_{T_1, T_2}(S(B^*(y), B(y)), \\ & R_{T_1, T_2}(A(x), A^*(x)))) = 1^* \end{aligned} \quad (2)$$

对于任意的 $x \in X, y \in Y$, R_{T_1, T_2} 是由左连续的区间值 t -可表示三角范数 T_{T_1, T_2} 诱导的区间值剩余蕴涵, 使得式 (2) 成立的论域 X 上的最小的区间值模糊集 A^* , 称为求解 FMT 问题的基于区间值相似度的模糊推理算法的解.

定理 1 设 R_{T_1, T_2} 是由左连续的区间值 t -可表示三角范数 T_{T_1, T_2} 诱导的区间值剩余蕴涵, 则求解 FMP 问题的基于区间值相似度的模糊推理算法的解为:

$$\begin{aligned} B^*(y) &= \sup_{x \in X} T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)), \\ & S(A^*(x), A(x))), A^*(x)), y \in Y \end{aligned} \quad (3)$$

证明 首先, 证明式 (3) 中 B^* 满足式 (1). 由式 (3) 可得 $T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)), S(A^*(x), A(x))), A^*(x)) \leq_{L'} B^*(y)$. 因为 R_{T_1, T_2} 是区间值剩余蕴涵, 则可得到, $T_{T_1, T_2}(S(A^*(x), A(x)), R_{T_1, T_2}(A(x), B(y))) \leq_{L'} R_{T_1, T_2}(A^*(x), B^*(y))$, 则 $R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)) \leq_{L'} R_{T_1, T_2}(S(A^*(x), A(x)), R_{T_1, T_2}(A(x), B(y))), R_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)), R_{T_1, T_2}(S(A^*(x), A(x)), R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)))) = [1, 1]$, 即 $R_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)), R_{T_1, T_2}(S(A^*(x), A(x)), R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)))) = [1, 1]$.

其次, 证明 B^* 是 Y 上满足式 (1) 的最小的区间值模糊子集. 假设 C 是满足式 (1) 的任意区间值模糊子集, 因为 R_{T_1, T_2} 是区间值剩余蕴涵, 则可得到: $R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)) \leq_{L'} R_{T_1, T_2}(S(A^*(x), A(x)), R_{T_1, T_2}(A(x), C(y))), T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)), S(A^*(x), A(x))), A^*(x)) \leq_{L'} C(y)$, 则对于所有的 $y \in Y, B^*(y) \leq_{L'} C(y)$, 所以 B^* 是 Y 上满足式 (1) 的最小的区间值模糊子集, 即 B^* 是基于区间值相似度的模糊推理算法解. 证毕.

定理 2 设 R_{T_1, T_2} 是由左连续的区间值 t -可表示三

角范数 T_{T_1, T_2} 诱导的区间值剩余蕴涵, 则求解 FMT 问题的基于区间值相似度的模糊推理算法的解为

$$A^*(x) = \sup_{y \in Y} T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)), S(B(y), B^*(y))), A(x)), x \in X \quad (4)$$

证明类似定理 1.

定义 12^[22] 对于一个求解 FMP 问题的算法, 如果 $A^* = A$ 可以推出 $B^* = B$, 则称此算法具有还原性; 类似地, 对于一个求解 FMT 问题的算法, 如果 $B^* = B$ 可以推出 $A^* = A$, 则称此算法具有还原性.

定义 13^[23] 如果存在 $x_0 \in X$, 使得 $A(x_0) = [1, 1]$, 则称区间值模糊集 A 是正规的.

命题 3 (1) 设 A 是区间值模糊集, 如果 A 是正规的, 则求解 FMP 问题的基于区间值相似度的模糊推理算法具有还原性.

(2) 设 B 是区间值模糊集, 如果 B 是正规的, 则求解 FMT 问题的基于区间值相似度的模糊推理算法是具有还原性.

证明 (1) 设 $A^*(x) = A(x)$, 且存在元素 $x_0 \in X$, 使得 $A(x_0) = [1, 1]$, 则可得到:

$$\begin{aligned} B(y) &\geq_{L'} B^*(y) \\ &= \sup_{x \in X} T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)), S(A^*(x), A(x))), A^*(x)) \\ &\geq_{L'} T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}(A(x_0), B(y)), S(A^*(x_0), A(x_0))), A^*(x_0)) \\ &= T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}([1, 1], B(y)), S([1, 1], [1, 1])), [1, 1]) \\ &= T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}([1, 1], B(y)), [1, 1]), [1, 1]) \\ &= B(y) \end{aligned}$$

即 $B(y) \leq_{L'} B^*(y) \leq_{L'} B(y)$, 所以可得 $B^* = B$, 即求解 FMP 问题的基于区间值相似度的模糊推理算法具有还原性.

(2) 假设 $B^*(y) = B(y)$, 且存在元素 $y_0 \in Y$, 使得 $B(y_0) = [1, 1]$, 则可得到:

$$\begin{aligned} A(x) &\geq_{L'} A^*(x) \\ &= \sup_{x \in X} T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)), S(B(y), B^*(y))), A(x)) \\ &\geq_{L'} T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}(A(x), B(y_0)), S(B(y_0), B^*(y_0))), A(x)) \\ &= T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}(A(x), [1, 1]), S([1, 1], [1, 1])), A(x)) \\ &= T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}(A(x), [1, 1]), [1, 1]), A(x)) \\ &= A(x) \end{aligned}$$

即 $A(x) \leq_{L'} A^*(x) \leq_{L'} A(x)$, 所以 $A^* = A$, 即求解 FMT 问题的

基于区间值相似度的模糊推理算法具有还原性. 证毕.

例 1 设由左连续区间值 t -可表示三角范数 $T_{T_1, T_2}([a_1, a_2], [b_1, b_2]) = [T_1(a_1, b_1), T_2(a_2, b_2)]$ 诱导的剩余蕴涵 $R_{T_1, T_2}([a, b], [c, d]) = [R_1(a, c) \wedge R_2(b, d), R_2(b, d)]$. 当 $T_1 = T_L, T_2 = T_G$ 时, 已知数据见表 1, 分别用区间值五蕴涵算法与区间值相似度的模糊推理算法求解 FMP 问题, 计算结果如表 2 所示.

表 1 A, A^* 和 B 的数据

	x_1	x_2	x_3
A	[0.49, 0.70]	[0.44, 0.62]	[0.51, 0.73]
A^*	[0.15, 0.40]	[0.30, 0.55]	[0.10, 0.35]
	y_1	y_2	y_3
B	[0.51, 0.74]	[0.62, 0.81]	[0.65, 0.76]

表 2 区间值五蕴涵算法与区间值相似度算法的解(FMP)

方法		y_1	y_2	y_3
五蕴涵算法	B^*	[1.00, 1.00]	[1.00, 1.00]	[1.00, 1.00]
本文算法	B^*	[0.00, 0.40]	[0.45, 0.55]	[0.00, 0.35]

从表 2 可以看出, 用基于区间值 t -可表示三角范数的模糊推理五蕴涵算法, 得到的解 B^* 是平凡解; 用本文提出的基于区间值 t -可表示三角范数的模糊推理相似度算法, 得到具体解 B^* . 说明本文提出的基于区间值相似度的模糊推理算法是有效的.

4 基于区间值相似度的模糊推理算法的鲁棒性

评价算法优劣的标准有连续性、还原性、鲁棒性等, 其中鲁棒性是评价推理算法的重要标准之一. 对推理算法而言, 当输入存在一个微小的偏差导致输出结果也存在微小的偏差, 就说这个推理算法的鲁棒性很好. 基于此, 在这一部分讨论基于区间值相似度的模糊推理算法的鲁棒性.

定理 3 设 A, A', A^*, A'^* 是论域 X 上的区间值模糊集, B, B' 是论域 Y 上的区间值模糊集, B^*, B'^* 分别由定理 1 给出求解 FMP 问题基于区间值相似度的模糊推理算法的解, 如果 $S(A, A') \geq_{L'} [a_1, b_1]$, $S(B, B') \geq_{L'} [a_2, b_2]$, $S(A^*, A'^*) \geq_{L'} [a_3, b_3]$ 则 $S(B^*, B'^*) \geq_{L'} [T_1(a_1, a_1, a_2, a_3, a_3), T_2(b_1, b_1, b_2, b_3, b_3)]$, 其中 $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3] \in L'$.

证明 由定理 1 及命题 2,

$$\begin{aligned} S(B^*, B'^*) &= \inf_{y \in Y} f_T(B^*, B'^*) \\ &= \inf_{y \in Y} f_T(\sup_{x \in X} T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)), S(A^*(x), A(x))), A^*(x)), \sup_{x \in X} T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}(A'(x), B'(y)), S(A'^*(x), A'(x))), A'^*(x))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\geq_{L'} \inf_{y \in Y} \inf_{x \in X} f_T(T_{T_1, T_2}(A^*(x), S(A^*(x), A(x))), R_{T_1, T_2}(A(x), B(y))), \\
 &\quad T_{T_1, T_2}(A^*(x), S(A^*(x), A'(x)), R_{T_1, T_2}(A'(x), B'(y)))) \\
 &\geq_{L'} \inf_{y \in Y} \inf_{x \in X} T_{T_1, T_2}(f_T(A^*(x), A^*(x)), f_T(S(A^*(x), A(x)), \\
 &\quad S(A^*(x), A'(x))), f_T(R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)), R_{T_1, T_2}(A'(x), B'(y)))) \\
 &\geq_{L'} \inf_{y \in Y} \inf_{x \in X} T_{T_1, T_2}(f_T(A^*(x), A^*(x)), T_{T_1, T_2}(f_T(A^*(x), A^*(x)), \\
 &\quad f_T(A(x), A^*(x))), T_{T_1, T_2}(f_T(A(x), A'(x)), f_T(B(y), B'(y)))) \\
 &\geq_{L'} T_{T_1, T_2}([a_1, b_1], [a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], [a_3, b_3]) \\
 &= [T_1(a_1, a_1, a_2, a_3, a_3), T_2(b_1, b_1, b_2, b_3, b_3)]. \text{ 证毕.}
 \end{aligned}$$

推论 1 设 A, A', A^*, A^* 是论域 X 上的区间值模糊集, B, B' 是论域 Y 上的区间值模糊集, B^*, B^* 分别由定理 1 给出的求解 FMP 问题的基于区间值相似度的模糊推理算法的解, 如果 $A=A', B=B', S(A^*, A^*) \geq_{L'} [a, b], S(B^*, B^*) \geq_{L'} [T_1(a, a), T_2(b, b)]$, 其中, $[a, b] \in L'$.

定理 4 设 A, A' 是论域 X 上的区间值模糊集, B, B', B^*, B^* 是论域 Y 上的区间值模糊集, A^*, A^* 分别由定理 2 给出求解 FMT 问题基于区间值相似度的模糊推理算法的解, 如果 $S(A, A') \geq_{L'} [a_1, b_1], S(B, B') \geq_{L'} [a_2, b_2], S(B^*, B^*) \geq_{L'} [a_3, b_3]$, 则 $S(A^*, A^*) \geq_{L'} [T_1(a_1, a_1, a_2, a_2, a_3), T_2(b_1, b_1, b_2, b_2, b_3)]$, 其中 $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3] \in L'$.

推论 2 设 A, A' 是论域 X 上的区间值模糊集, B, B', B^*, B^* 是论域 Y 上的区间值模糊集, A^*, A^* 分别由定理 2 给出的求解 FMT 问题的基于区间值相似度的模糊推理算法的解, 如果 $A=A', B=B', S(B^*, B^*) \geq_{L'} [a, b]$, 则 $S(A^*, A^*) \geq_{L'} [a, b]$, 其中 $[a, b] \in L'$.

由定理 3 及定理 4 可以看出, 求解 FMP 问题与 FMT 问题的基于区间值模糊推理算法解的相似度 $S(B^*, B^*)$ 与 $S(A^*, A^*)$ 取决于区间值三角范数 T_{T_1, T_2} , 区间值三角范数越大, 解的相似度的下界就越大, 从而解的相似度就越大, 即解的相似度关于区间值三角范数单调递增.

例 2 设由左连续区间值 t -可表示三角范数 $T_{T_1, T_2}([a_1, a_2], [b_1, b_2]) = [T_1(a_1, b_1), T_2(a_2, b_2)]$ 诱导的剩余蕴涵 $R_{T_1, T_2}([a, b], [c, d]) = [R_1(a, c) \wedge R_2(b, d), R_2(b, d)]$, 分别取不同的区间值 t -可表示三角范数 $T_{(T_1, T_2)_1}$ ($T_1 = T_L, T_2 = T_{G_0}$), $T_{(T_1, T_2)_2}$ ($T_1 = T_{G_0}, T_2 = T_G$) 和区间值 t -可表示三角范数 $T_{(T_1, T_2)_3}, T_{(T_1, T_2)_4}$ 分别诱导的剩余蕴涵 $R_{(T_1, T_2)_1}$ ($R_1 = R_L, R_2 = R_{G_0}$) 和 $R_{(T_1, T_2)_2}$ ($R_1 = R_{G_0}, R_2 = R_G$), 已知数据见表 3, 利用区间值相似度的模糊推理算法求解 FMP 问题的解 B^*, B^* 见表 4.

由表 3 数据可知, $A=A', B=B', S_1(A^*, A^*) = [0.16, 0.40]$ 时, $S_1(B^*, B^*) = [0.00, 0.33]; S_2(A^*, A^*) = [0.15, 0.40]$ 时,

表 3 A, A', A^*, A^* 和 B, B' 的数据

	x_1		x_2
A	[0.49, 0.70]	A'	[0.49, 0.70]
A^*	[0.15, 0.40]	A^*	[0.95, 0.99]
	y_1		y_2
B	[0.51, 0.74]	B'	[0.51, 0.74]

表 4 区间值相似度模糊推理算法的解 B^*, B^*

	B^*	B^*
$R_{(T_1, T_2)_1}$	[0.00, 0.23]	[0.49, 0.70]
$R_{(T_1, T_2)_2}$	[0.02, 0.40]	[0.49, 0.74]

$S_2(B^*, B^*) = [0.02, 0.40]$. 由此可得, 解的相似度 $S(B^*, B^*)$ 与区间值 t -可表示三角范数 T_{T_1, T_2} 紧密相关, 当 $T_{(T_1, T_2)_1} \leq_{L'} T_{(T_1, T_2)_2}$, 得到解的相似度 $S_1(B^*, B^*) \leq_{L'} S_2(B^*, B^*)$, 即解的相似度关于区间值三角范数单调递增.

5 基于区间值相似度的广义模糊推理算法

在本节中, 讨论 FMP 和 FMT 基于区间值相似度的广义模糊推理算法, 并且给出算法解的表示形式.

定义 14 求解 FMP 问题的基于区间值相似度的广义模糊推理原理:

$$\begin{aligned}
 &R_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)), R_{T_1, T_2}(S(A^*(x), \\
 &A(x)), R_{T_1, T_2}(A^*(x), B^*(y)))) \geq_{L'} [a, b]
 \end{aligned} \tag{5}$$

对于任意的 $x \in X, y \in Y$, 使得式 (5) 成立的论域 Y 上的最小的区间值模糊集 B^* , 称为求解 FMP 问题的基于区间值相似度的广义模糊推理算法的解.

定义 15 求解 FMT 问题的基于区间值相似度的广义模糊推理算法:

$$\begin{aligned}
 &R_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)), R_{T_1, T_2}(S(B^*(y), \\
 &B(y)), R_{T_1, T_2}(A(x), A^*(x)))) \geq_{L'} [a, b]
 \end{aligned} \tag{6}$$

对于任意的 $x \in X, y \in Y$, 使得上式成立的论域 X 上的最大的区间值模糊集 A^* , 称为求解 FMT 问题的基于区间值相似度的广义模糊推理算法的解.

定理 5 求解 FMP 问题的基于区间值相似度的广义模糊推理算法的解为

$$\begin{aligned}
 B_{[a, b]}^*(y) = \sup_{x \in X} T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}([a, b], R_{T_1, T_2}(A(x), B(y))), \\
 S(A^*(x), A(x))), A^*(x)), y \in Y
 \end{aligned} \tag{7}$$

证明 首先证明 $B_{[a, b]}^*$ 是 Y 上的区间值模糊集对于任意的 $x \in X, y \in Y$ 使得式 (5) 成立. 由式 (7) 得: $T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}([a, b], R_{T_1, T_2}(A(x), B(y))), S(A^*(x), A(x))), A^*(x)) \leq_{L'} B_{[a, b]}^*(y)$, 因为 R_{T_1, T_2} 是区间值剩余蕴涵, 所以, $T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}([a, b], R_{T_1, T_2}(A(x), B(y))), S(A^*(x), A(x))) \leq_{L'} R_{T_1, T_2}(A^*(x), B_{[a, b]}^*(y)), T_{T_1, T_2}([a, b], R_{T_1, T_2}(A(x), B(y))) \leq_{L'} R_{T_1, T_2}$

$(S(A^*(x), A(x)), R_{T_1, T_2}(A^*(x), B_{[a,b]}^*(y))) R_{T_1, T_2}(R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)), R_{T_1, T_2}(S(A^*(x), A(x)), R_{T_1, T_2}(A^*(x), B_{[a,b]}^*(y)))) \geq_L [a, b]$.

其次,证明 $B_{[a,b]}^*$ 是使得式(5)成立 Y 上的最小的区间值模糊集. 假设 C 是使得式(5)成立 Y 上的任意区间值模糊集, 因为 R_{T_1, T_2} 是区间值剩余蕴涵, 则

$$R_{T_1, T_2}(A(x), B(y)) \leq_L R_{T_1, T_2}([a, b], R_{T_1, T_2}(S(A^*(x), A(x)),$$

$$R_{T_1, T_2}(A^*(x), C(y))),$$

$$T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}([a, b], R_{T_1, T_2}(A(x), B(y))), S(A^*(x), A(x)))$$

$$\leq_L R_{T_1, T_2}(A^*(x), C(y)),$$

$$T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}([a, b], R_{T_1, T_2}(A(x), B(y))), S(A^*(x), A(x))),$$

$$A^*(x)) \leq_L C(y)$$

成立, 因此, $B_{[a,b]}^* \leq C$, 即 $B_{[a,b]}^*$ 是求解 FMP 问题的基于区间值相似度的广义模糊推理算法的解. 证毕.

定理 6 求解 FMT 问题的基于区间值相似度的广义模糊推理算法的解为:

$$A_{[a,b]}^*(x) = \sup_{x \in X} T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}(T_{T_1, T_2}([a, b], R_{T_1, T_2}(A(x), B(y))), S(B(y), B^*(y))), A(x)), (x \in X) \quad (8)$$

证明类似于定理 5.

6 结论

本文给出一种新的区间值模糊集的相似度量, 研究基于此区间值相似度的模糊推理算法, 讨论基于区间值相似度的模糊推理算法的相关性质, 证明了基于区间值相似度的模糊推理算法具有还原性, 证明了算法的鲁棒性, 研究基于区间值相似度的广义模糊推理算法, 并给出广义区间值模糊推理算法解的表示形式.

在进一步的研究中, 尝试将基于区间值相似度模糊推理算法纳入模糊逻辑的框架, 建立区间值相似度模糊推理算法的逻辑基础, 并且应用该算法解决模式识别与多属性决策等问题.

参考文献

- [1] BACZYNSKI M, JAYARAM B. Fuzzy Implications[M]. Heidelberg: Springer Science Business Media, 2008.
- [2] ZADEH L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1973, 3(1): 28-44.
- [3] 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法[J]. 中国科学(E辑), 1999, 29(1): 43-53.
WANG Guo-jun. The full implication triple I method of fuzzy reasoning[J]. Sciences in China (Series E), 1999, 29(1): 43-53. (in Chinese)
- [4] 罗敏霞, 王雅萍. 基于 Schweizer-Sklar 三角范数簇的反向

三 I 算法的鲁棒性[J]. 电子学报, 2016, 44(4): 959-966.

LUO Min-xia, WANG Ya-ping. Robustness of the reverse triple I algorithms based on Schweizer-Sklar triangular norms [J]. Acta Electronica Sinica, 2016, 44(4): 959-966. (in Chinese)

- [5] ZHOU B K, XU G, LI S J. The quintuple implication principle of fuzzy reasoning[J]. Information Sciences, 2015, 297: 202-215.
- [6] LUO M X, ZHAO R R. Fuzzy reasoning algorithms based on similarity[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2018, 34: 213-219.
- [7] ZADEH L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I[J]. Information Sciences, 1975, 8: 199-249.
- [8] LI D C, LI Y M, XIE Y J. Robustness of interval-valued fuzzy inference[J]. Information Sciences, 2011, 181: 4754-4764.
- [9] 王蓉, 惠小静, 井美. 基于区间值模糊推理 SIS 算法的鲁棒性[J]. 模糊系统与数学, 2018, 32(5): 1-7.
WANG Rong, HUI Xiao-jing, JING Mei. Robustness of SIS algorithm based on interval-valued fuzzy reasoning[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2018, 32(5): 1-7. (in Chinese)
- [10] LUO M X, ZHANG K. Robustness of full implication algorithms based on interval-valued fuzzy inference[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2015, 62: 61-72.
- [11] LUO M X, ZHOU X L. Interval-valued quintuple implication principle of fuzzy reasoning[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2017, 84: 23-32.
- [12] LUO M X, WANG Y J, ZHAO R R. Interval-valued fuzzy reasoning method based on similarity measure[J]. Journal of Logical and Algebraic Methods in Programming, 2020, 113: 100541.
- [13] LUO M X, WANG Y J. Interval-valued fuzzy reasoning full implication algorithms based on the t -representable t -norm[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2020, 122: 1-8.
- [14] 王雅婧, 罗敏霞, 张花荣. 基于区间值 t -可表示三角范数的模糊推理五蕴涵算法[J]. 中国计量大学学报, 2019, 30(3): 351-360.
WANG Ya-jing, LUO Min-xia, ZHANG Hua-rong. Interval-valued fuzzy reasoning quintuple implication algorithms based on the t -representable triangular norm[J]. Journal of China University of Metrology, 2019, 30(3): 351-360. (in Chinese)

- [15] KLEMENT E P, MESIAR R, PAP E. Triangular Norms [M]. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [16] DAVEY B A, PRIESTLEY H A. Introduction to Lattices and Order[M]. New York: Cambridge University Press, 1990.
- [17] DESCHRIJVER G. The archimedean property for t -norms in interval-valued fuzzy set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(17): 2311-2327.
- [18] JENEI S. A more efficient method for defining fuzzy connectives[J]. Fuzzy Sets and System, 1997, 90: 25-35.
- [19] DESCHRIJVER G, CORNELIS C, KERRE E E. On the representation of intuitionistic fuzzy t -norms and t -co-norms[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2004, 12(1): 45-61.
- [20] LI D C, XIE Y J, JIANG Y F. Natural negation of interval-valued t - (co)norms and implications[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2016, 15(1): 1-20.
- [21] TURUNEN E. Mathematics behind Fuzzy Logic[M]. Dordrecht: Springer Science Business Media, 1999.
- [22] WANG G J. On the logic foundation of fuzzy reasoning [J]. Information Sciences, 1999, 117: 47-88.
- [23] LUO M X, ZHOU X L. Interval-valued quintuple implication principle of fuzzy reasoning[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2017, 84: 23-32.

作者简介



史宏艳 女, 1995年生于山西太原, 硕士研究生, 研究方向为区间值模糊推理算法。
E-mail: S1908070108@ejlu.edu.cn



罗敏霞(通讯作者) 女, 1964年生于山西运城, 教授、博士、硕士生导师, 担任中国人工智能学会人工智能基础专业委员会常务委员; 中国逻辑学会非经典逻辑与计算专委会委员; 国际信息研究学会中国分会人工智能专业委员会专家委员. 主要研究方向为计算机科学中的非经典逻辑、模糊推理算法与图像处理等. 先后在国际国内专业领域的期刊上发表论文 120 余篇, 出版专著 2 部, 教材 1 部。

E-mail: mxluo@ejlu.edu.cn